Poloměr konvergence

Věta (výpočet poloměru konvergence)

Pro mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *je poloměr konvergence roven*

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Poloměr konvergence je zároveň roven $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, *pokud tato limita existuje.*

Poznámka: je-li $\rho > 0$ poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, potom platí: pokud $|z_0 - z| < \rho$ potom (číselná) řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konverguje (dokonce absolutně), pokud $|z_0 - z| > \rho$, potom řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ diverguje.

Poloměr konvergence - příklad

Spočítáme poloměr konvergence mocninné řady řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n!(n+2)!} z^n$.
Nejdříve zkusíme (obtížnější) výpočet pomocí odmocninového kritéria:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n+1)!}{n!(n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \sqrt[n]{\frac{(2n+1)}{(n+1)(n+2)}}$$

Předně $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n+1)}{(n+1)(n+2)}} = 1$ (n-tá odmocnina z polynomu jde vždy k jedné). Dále za pomoci známé limity $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty} 4 \left(\frac{\sqrt[2n]{(2n)!}}{2n} \right)^2 \cdot \left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \right)^2 = 4 \cdot \frac{1}{e^2} \cdot e^2 = 4$$

Poloměr konvergence - příklad

Celkově pak

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n+1)}{(n+1)(n+2)}} = 1 \cdot 4 = 4.$$

Poloměr konvergence mocninné řady $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n!(n+2)!} z^n$ je tedy $\dfrac{1}{4}$.

Podobně počítáme pomocí (vhodnějšího) podílového kritéria

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+1)!}{n!(n+2)!}}{\frac{(2n+3)!}{(n+1)!(n+3)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+3)}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{1}{4}.$$

Důležité mocninné řady a základní úprava

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z, \quad z \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} = \log(z+1), \quad |z| < 1.$$

Základní úpravy:

$$\sum a_n (z - z_0)^n$$

Důležité mocninné řady a základní úprava

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z, \quad z \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} = \log(z+1), \quad |z| < 1.$$

Základní úpravy:

$$\sum a_n (z-z_0)^n = (z-z_0) \sum a_n (z-z_0)^{n-1}$$

Důležité mocninné řady a základní úprava

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z, \quad z \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} = \log(z+1), \quad |z| < 1.$$

Základní úpravy:

$$\frac{1}{(z-z_0)} \sum a_n (z-z_0)^{n+1} = \sum a_n (z-z_0)^n = (z-z_0) \sum a_n (z-z_0)^{n-1}$$

Důležité mocninné řady a základní úprava

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z, \quad z \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} = \log(z+1), \quad |z| < 1.$$

Základní úpravy:

$$\frac{1}{(z-z_0)} \sum a_n (z-z_0)^{n+1} = \sum a_n (z-z_0)^n = (z-z_0) \sum a_n (z-z_0)^{n-1}$$

$$\sum a_n (z-z_0)^{2n} = \sum a_n ([z-z_0]^2)^n$$

Derivace mocninné řady

Věta (derivace mocninné řady)

Má-li mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_n)^n$ *poloměr konvergence* $\rho > 0$, *má stejný poloměr konvergence i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_n)^{n-1}$. *Označíme-li* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_n)^n$, $z \in U(z_0, \rho)$, *potom* $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_n)^{n-1}$.

Příklady

Sečteme $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)z^n$. Poloměr konvergence je zjevně 1, bereme tedy pouze $|z| < 1$. Zkusíme tři různé úpravy. Máme

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)z^n &= 2\sum_{n=0}^{\infty} nz^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(\sqrt{z})^{2n} \quad z \geq 0\end{aligned}$$

Proč jsou první dvě úpravy korektní? (řady na obou stranách mají stejné poloměry konvergence)

Příklady

Sečteme $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)z^n$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)z^n &= 2\sum_{n=0}^{\infty} nz^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 2z\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} + \frac{1}{1-z} \\ &= 2z\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right)' + \frac{1}{1-z} = 2z\left(z\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' + \frac{1}{1-z} \\ &= 2z\left(\frac{z}{1-z}\right)' + \frac{1}{1-z} = 2z\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z} \\ &= \frac{z+1}{(1-z)^2}\end{aligned}$$

Příklady

Sečteme $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)z^n$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)z^n &= 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n - \sum_{n=0}^{\infty}z^n = 2\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1}\right)' - \frac{1}{1-z}\\ &= 2\left(z\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)' - \frac{1}{1-z} = 2\left(\frac{z}{1-z}\right)' - \frac{1}{1-z}\\ &= 2\frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z} = \frac{z+1}{(1-z)^2}\end{aligned}$$

Příklady

Sečteme $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)z^n$.

Položíme $f(w)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)w^{2n}$, potom pro $z\geq 0$ máme

$$f(\sqrt{z})=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(\sqrt{z})^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)z^n.$$

Dále

$$f(w)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)w^{2n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}w^{2n+1}\right)'=\left(w\sum_{n=0}^{\infty}(w^2)^n\right)'$$
$$=\left(\frac{w}{1-w^2}\right)'=\frac{1+w^2}{(1-w^2)^2}$$

A tedy pro $z\geq 0$ dostaneme $f(\sqrt{z})=\dfrac{1+(\sqrt{z})^2}{(1-(\sqrt{z})^2)^2}=\dfrac{z+1}{(1-z)^2}$.

Příklady

Sečteme $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$. Poloměr konvergence je opět zjevně 1, bereme tedy pouze $|z| < 1$.
Máme

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = z\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n-1} = z\left(\sum_{n=1}^{\infty} nz^n\right)' = z\left(z\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}\right)'$$

$$= z\left(z\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right)'\right)' = z\left(z\left(z\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)'\right)'$$

$$= z\left(z\left(\frac{z}{1-z}\right)'\right)' = z\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)' = z\frac{1+z}{(1-z)^3}$$

A tedy $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = \dfrac{z^2+z}{(1-z)^3}$.

Integrace mocninné řady

Věta (integrace mocninné řady)

Má-li mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_n)^n$ *poloměr konvergence* $\rho > 0$, *má stejný poloměr konvergence i řada* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_n)^{n+1}$. *Označíme-li*

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_n)^{n+1}$, $z \in U(z_0, \rho)$, *potom*

$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_n)^n$.

Integrace mocninné řady - příklad

Sečteme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n+3}$. Poloměr konvergence je 1.

Pro $z = 0$ je součet 0. Pro $0 < |z| < 1$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{n+3} = \frac{1}{z^6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z^2)^{n+3}}{n+3}$$

Potřebujeme tedy spočítat $\frac{1}{z^6} f(z^2)$, kde $f(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^{n+3}}{n+3}$.

Víme, že $f'(w) = \sum_{n=1}^{\infty} w^{n+2} = \frac{w^3}{1-w}$ (pro $|w| < 1$).

Protože $\int \frac{w^3}{1-w}\, dw \overset{c}{=} -\frac{w^3}{3} - \frac{w^2}{2} - w - \log(1-w)$

Tedy existuje $C \in \mathbb{R}$, že $f(w) = -\frac{w^3}{3} - \frac{w^2}{2} - w - \log(1-w) + C$.

Integrace mocninné řady - příklad

Sečteme řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n+3}$.

Potřebujeme spočítat $\displaystyle\frac{1}{z^6} f(z^2)$, kde $\displaystyle f(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^{n+3}}{n+3}$.

Existuje $C \in \mathbb{R}$, že $\displaystyle f(w) = -\frac{w^3}{3} - \frac{w^2}{2} - w - \log(1-w) + C$.

Navíc $\displaystyle C = \frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} - 0 - \log(1-0) + C = f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^{n+3}}{n+3} = 0$.

Platí tedy $\displaystyle f(w) = -\frac{w^3}{3} - \frac{w^2}{2} - w - \log(1-w)$ a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n+3} = \frac{1}{z^6} f(z^2) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{z^4} - \frac{\log(1-z^2)}{z^6}, \quad 0 < |z| < 1.$$

Hraniční chování mocninné řady

Věta (Abelova)

Má-li mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_n)^n =: f(z)$ *poloměr konvergence* $\infty > \rho > 0$, *potom:*

- *pokud řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\rho^n$ *konverguje, potom*

$$\lim_{z\to\rho-} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\rho^n$$

- *pokud řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\rho)^n$ *konverguje, potom*

$$\lim_{z\to-\rho+} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\rho)^n$$

Hraniční chování - příklad

Sečteme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Položme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} z^{n+1}$, chceme zjistit hodnotu $\lim_{z\to 1-} f(z)$.

Máme $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} =: g(z)$ a $g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Protože $\int \frac{1}{1-z} \overset{c}{=} -\log(1-z)$, $z \in (-1,1)$, víme, že existuje $C \in \mathbb{R}$, že platí $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\log(1-z) + C$.

Navíc $0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n} = -\log(1-0) + C = C$, a tedy $f'(z) = -\log(1-z)$.

Opětovnou integrací (pomocí per partes) dostaneme, že existuje $D \in \mathbb{R}$, že platí $f(z) = (1-z)\log(1-z) + z + D$. Navíc $f(0) = 0$ a tedy $D = 0$ a $f(z) = (1-z)\log(1-z) + z$.

Hraniční chování - příklad

Sečteme řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Položme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} z^{n+1}$, chceme zjistit hodnotu $\lim_{z\to 1-} f(z)$.

Opětovnou integrací (pomocí per partes) dostaneme, že existuje $D \in \mathbb{R}$, že platí $f(z) = (1-z)\log(1-z) + z + D$. Navíc $f(0) = 0$ a tedy $D = 0$ a $f(z) = (1-z)\log(1-z) + z$.

Protože řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ určitě konverguje (např. srovnáním s $\sum \frac{1}{n^2}$) víme (podle Abelovy věty), že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{z\to 1-} f(z) = \lim_{z\to 1-} [(1-z)\log(1-z) + z] = 1.$$

Hraniční chování - příklad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{z\to 1-} f(z) = \lim_{z\to 1-} [(1-z)\log(1-z)+z] = 1.$$

Podobné příklady se dají řešit i elementárně, pomocí rozkladu na parciální zlomky:

máme $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1.$$

Podobný trik můžeme použít i pro mocninné řady, ale pozor na detaily:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

Hraniční chování - příklad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} z^{n+1} = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} =: z \cdot f_1(z) - f_2(z)$$

$$f_1'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z} \implies f_1(z) = -\log(1-z)$$

$$f_2'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n} = \frac{z}{1-z} \implies f_2(z) = -z - \log(1-z)$$

Pozor, limity $\lim_{z \to 1-} f_1(z)$ a $\lim_{z \to 1-} f_2(z)$ neexistují, ale

$$\lim_{z \to 1-} [z \cdot f_1(z) - f_2(z)] = \lim_{z \to 1-} [(1-z)\log(1-z) + z] = 1,$$

což nám stačí.